言語進化ゲームにおける中立安定戦略の均衡選択

著者	内田 誠吾, 宮下 春樹, 福住 多一
雑誌名	筑波大学経済学論集
号	68
ページ	121-144
発行年	2016-03-31
その他のタイトル	〈Articles〉Equilibrium Selection among Neutrally Stable Strategies in Games of Language Evolution
URL	http://hdl.handle.net/2241/00137030

言語進化ゲームにおける中立安定戦略の均衡選択

内田 誠吾，宮下 春樹，福住 多一

1　導入

経済学はもとより，あらゆる人文社会科学の諸分野において，言語というものの特性を解明することの重要性に異論はないであろう．社会を形成する個体間でのコミュニケーション行動には多くの様式がある．その中で，淘汰圧力にさらされながら進化的プロセスを経て社会に定着した定型的コミュニケーション行動を，その社会の言語と想定してみる．この見方に拠って立つ言語の進化理論は，その対象によって次の 3 つに大別される．1. 動物と人間の区別を問わない個体間コミュニケーションの一般的なシステム，2. 動物から人間への生物的進化に伴うコミュニケーションの連続性と変性，そして 3. 動物にない人間固有の言語の特徴である（Trapa and Nowak, 2000）．我々は本論文において，第 1 に挙げられた一般的なコミュニケーション・システムの進化的安定性について考察する．[*1]

コミュニケーション・システムをゲーム理論で表現してみよう．[*2]送り手（sender）と受け手（receiver）と呼ばれる 2 人プレイヤーからなるゲームを考える．これは Sender-Receiver Games とも呼ばれるクラスに属する．以降，我々はこれを **SR ゲーム**と呼ぶ．SR ゲームのシンプルなケースを図 1 のゲームの木を用いて説明する．我々は，このシンプルなケースをより一般化した SR ゲームは第 2 節で説明する．

まず，送り手しか観察できない事象（対象）n_1 もしくは n_2 が起こる．各事象はすべて等確率で起こると仮定する．ゲームの木の N は，自然（nature）を表す．送り手は観察した事象により S_1 タイプ，S_2 タイプとも呼ばれる．送り手は利用可能なメッセージ（記号）m_1 もしくは m_2 のうちから 1 つを選び，受け手に送る．受け手は受

[*1] 本論文は均衡選択の手法を 2 種類取り上げている．現在，言語進化ゲーム理論の研究において，主な技術的潮流がその 2 つに大別される．したがって我々は，本論文がこの研究分野に関心を持つ読者の学習ガイドラインとして読まれることも期待している．

[*2] Trapa and Nowak（2000）は，このゲームの進化的安定戦略をコミュニケーション・システムと呼んでいる．本論文では，「システム」は均衡を指すわけではなく，より広い意味で用いている．

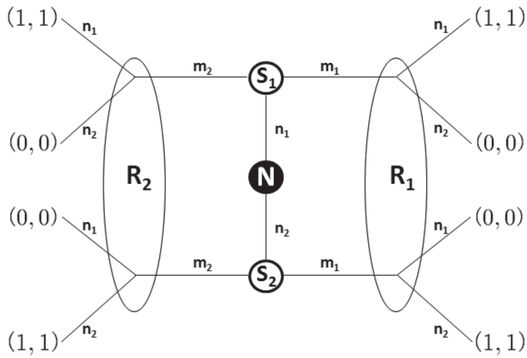

図 1　シンプルな SR ゲーム（事象 2 つ，メッセージ 2 つのケース）

け取った各メッセージを事象 n_1 もしくは n_2 いずれかと対応させる．受け手が対応させた事象と，送り手が観察した事象が一致したときのみ，両プレイヤーはそれぞれ等しい大きさの正の利得（本論文では 1 としておく）を得るとする．[*3]送り手しか観察できない事象を，受け手がメッセージを通して知るとき，双方に利益が生まれるコミュニケーション・システムである．ここで，事前には各メッセージに特定の事象は対応していない．メッセージは単なる記号である．各メッセージがもつ意味（対応する事象）は，あくまでもゲームの均衡戦略で与えられる．

SR ゲームを形式的に表現すれば，送り手の純戦略は，事象の集合から利用可能なメッセージ集合への関数であり，受け手の純戦略は，メッセージの集合から事象の集合への関数である．混合戦略およびそれに対応する期待利得は，ゲーム理論の通常の混合拡大（mixed extension）による．

SR ゲームの戦略を第 2 節以降では行列を用いて表現する．例として，図 1 の SR ゲームで，送り手 S_1 が m_2 を送り，送り手 S_2 も m_2 を送る戦略をとるとする．受け手は m_1 に n_1，m_2 に n_2 をそれぞれ対応させるとする．この送り手の戦略と受け手の戦略は，それぞれ次の 2×2 行列 P, Q で表現される．

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

行列 P の第 1 行が S_1 の純戦略を示す．P の $(1, 2)$ 成分 1 が，m_2 を送ることを表し

[*3] コミュニケーションが成功したとき，送り手と受け手はともに同じだけ状態が良くなる．したがって，両者の間に利害対立のないコミュニケーションを我々は考察していることになる．

ている．行列 P の第 2 行が S_2 の純戦略を示す．$(2,2)$ 成分 1 が，m_2 を送ることを表している．行列 Q の第 1 行が m_1 を受け取った受け手の純戦略を示す．Q の $(1,1)$ 成分 1 が，m_1 を n_1 に対応させることを表している．行列 Q の第 2 行が m_2 を受け取った受け手の純戦略を示す．$(2,2)$ 成分 1 が，m_2 を n_2 に対応させることを表している．この P と Q を組み合わせたとき，ゲームの結果における各プレイヤーの利得は，次のように行列の積 PQ の対角成分の和（trace）として計算することができる．

$$\mathrm{tr}(PQ) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 + 1 = 1.$$

この SR ゲームは送り手と受け手の間で戦略集合が異なる非対称ゲームである．我々はこの SR ゲームをプレイするプレイヤー達からなるプレイヤー集団を想定する．各プレイヤーは集団の他のプレイヤーとランダムに組となって SR ゲームをプレイする．（これをランダムマッチングでプレイすると言う．）その際，各プレイヤーは確率 $\frac{1}{2}$ で送り手もしくは受け手の役割になるとしよう．すると，各プレイヤーの戦略は，送り手としての戦略 P と受け手としての戦略 Q の組 (P,Q) とするのが自然であろう．こうして，どのプレイヤーにとっても戦略集合が等しく利得関数も等しい対称 SR ゲームを想定することとなる．

より一般的な SR ゲームでも，事象とメッセージの集合は，ともに有限集合とする．よって混合拡大された対称 SR ゲームはナッシュ均衡点をもつ．しかし，このナッシュ均衡点は，一般には無限個存在することが知られている．そこで進化ゲーム理論による均衡選択が試みられる．その進化ゲーム理論の適応動学で選択されるナッシュ均衡戦略が，そのプレイヤー集団内に定着するコミュニケーション・システムと解釈される．[*4]

Trapa and Nowak (2000) は，この対称 SR ゲームで**進化的安定戦略**（Evolutionarily Stable Strategy；以降 ESS と表記する）が存在する必要十分条件は，事象の集合とメッセージの集合が同じサイズであることを示している．Pawlowitsch (2008) は，この対称 SR ゲームの**中立安定戦略** (Neutrally Stable Strategy；以降 NSS と表記する) の詳細な特徴づけを行っている．これらの均衡戦略の概念は，集団に想定される適応動学と密接な関係がある．動学の状態空間をプレイヤー集団における戦略の分布としよう．[*5]この状態空間上で，次のような連続時間の動学を想定してみる．各時間 t において，プレイヤーどうしのランダムマッチングによる平均利得より高い利得をもたらす戦略は集団中で増加し，ランダムマッチングによる平均利得より低い

[*4] 言語をゲームのナッシュ均衡点として解釈した先駆的研究として Lewis (1969) がある．

[*5] 戦略の分布と対称 SR ゲームの混合戦略は同一視できることに注意しておく．

利得をもたらす戦略は集団中で減少すると仮定する．この適応過程モデルをレプリケーター動学と呼ぶ．ESS はレプリケーター動学の漸近安定点であり，NSS はこの動学のリアプノフ安定状態に対応することが知られている．漸近安定状態の近くを初期状態とするこの動学の状態は，その後，限りなくその漸近安定状態に近づく．リアプノフ安定状態の近くを初期状態とするこの動学の状態は，その後，リアプノフ安定状態の近くに留まる．したがって漸近安定ならばリアプノフ安定であり，逆は成立しない．

事象の集合とメッセージの集合が異なるサイズである場合，ESS は存在しないが NSS は存在し得る．ただし第 2 節で見るように，NSS の集合は無限個の要素からなる．我々は ESS をもたないが無限個の NSS をもつ 2 事象・3 メッセージの SR ゲームを集中的に調べる．各 NSS はレプリケーター動学ではリアプノフ安定的である．NSS のうちから均衡を選択するために，我々は通常のレプリケーター動学とは異なる適応過程を想定し，その過程の収束先として出現する NSS を調べる．

まず，通常の連続時間レプリケーター方程式にどの時間 t でも突然変異が一定の微小確率で起こる項を加えた**淘汰・突然変異動学**（selection mutation dynamics）（Hofbauer, 1985）による均衡選択を検討する．特に，事象 2 つ・メッセージ 3 つという ESS がないゲーム・クラスの例における NSS を調べる．そこで無限個の連結した NSS のうちから，突然変異の確率ごとに淘汰・突然変異動学の漸近安定点として戦略が 1 つだけ選択されることが判明する．これは，突然変異の確率がゼロに収束するとき，漸近安定な NSS の収束先としての戦略が 1 つだけ選択されることも含意する．

続く節では，2 事象・3 メッセージの SR ゲームから 2 種類の NSS をピックアップしてマッチングさせ，次のような淘汰プロセスで比較する．有限人数のプレイヤー集団を想定する．これらのうちの一方の NSS をとっている人数を状態空間とし，離散時間の出生死亡過程を考える．これは確率過程であり，推移行列で表現される．推移行列が，毎期の集団内のランダムマッチングによる期待利得の大きさに依存するものを**頻度依存の出生死亡過程**（frequency-dependent birth-death process; Nowak et al., 2004）と呼ぶ．また推移行列が，ゲームの利得に依存しないものを**中立的浮動** (neutral drift) と呼ぶ．初期状態として，一方の戦略をとっているプレイヤー数が 1 である場合を考える．これは，全員がもう一方の戦略をとっている集団に，1 人の突然変異が侵入すると考えればよい．そこから出生死亡過程にしたがい，集団全員がその突然変異で生まれた戦略をとるようになる確率を**固定確率**と呼ぶ．頻度依存の出生死亡過程での固定確率が，中立的浮動の固定確率より高い戦略を，我々は淘汰において有利であると考える．この出生死亡過程による選択を検討すると，次のような結

果が見出される．使われないメッセージがある NSS どうしがマッチングする集団では，いずれの戦略も有利とは言えない場合がある．また，使われないメッセージがある NSS と，一部のメッセージを確率的に混合して，すべてのメッセージを使う NSS がマッチングする集団では，後者が有利になる場合がある．

本論文の構成は次の通りである．続く第 2 節では，Pawlowitsch (2008) の記法に依拠して SR ゲーム・モデルを定式化し，先行研究に基づいてこのゲームの均衡の特徴を例を挙げながら説明する．続けて，我々が関心を寄せる 2 事象・3 メッセージのクラスの NSS の静学的な特徴づけを行う．第 3 節では例を用いて淘汰・突然変異動学によって中立安定戦略の集合から 1 つの戦略が選択されることを検討している．第 4 節では例を用いてプレイヤー数が有限である出生死亡過程に基づく淘汰プロセスで有利になる NSS の条件を調べている．第 5 節はまとめと今後の研究の展望である．最後に付録として，頻度依存の出生死亡過程の推移確率行列の定式化と，それに基づく固定確率の導出方法を説明する．

2 モデル

2.1 SR ゲーム

送り手（sender）と受け手（receiver）からなる 2 人ゲームを想定する．送り手にのみ観察される事象が n 種類あり，送り手が受け手に送ることができるメッセージが m 種類あるとする．送り手の純戦略は，行列

$$P \in \mathcal{P}_{n\times m} = \{P \in \mathbf{R}_+^{n\times m} : \forall i, \exists! j = j'(i),\ p_{ij} = 1 \text{ and } \forall j \neq j'(i),\ p_{ij} = 0\}$$

で表される．行列成分 $p_{ij} = 1$ であれば，この行列の第 i 行は送り手が事象 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ を観察したとき，メッセージ $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ を送る局所戦略を表す．受け手の純戦略は，行列

$$Q \in \mathcal{Q}_{m\times n} = \{Q \in \mathbf{R}_+^{m\times n} : \forall j, \exists! i = i'(j),\ q_{ji} = 1 \text{ and } \forall i \neq i'(j),\ q_{ji} = 0\}$$

で表される．行列成分 $q_{ji} = 1$ であれば，この行列の第 j 行は受け手がメッセージ $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ を受け取ったとき，それに事象 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ を対応させる局所戦略を表す．

送り手，受け手の利得関数 $\pi(P, Q)$ は，ともに次で与えられる．

$$\pi(P, Q) = \mathrm{tr}(PQ) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} q_{ji}.$$

$p_{ij}q_{ji} = 1$ であれば，事象 i が送り手に観察されたとき，メッセージ j を介してその事象の生起が受け手に認識されることを意味する．以上で定義されるゲームを非対称 SR ゲームと呼ぶ．

プレイヤー集団内でのコミュニケーションにおいて，各プレイヤーは送り手にも受け手にもなりえると想定するのは自然である．そこで，各プレイヤーの戦略は送り手としての戦略 P と受け手としての戦略 Q の組 $(P, Q) \in \mathcal{P}_{n\times m} \times \mathcal{Q}_{m\times n}$ とする．戦略 (P, Q) をとるプレイヤーと戦略 (P', Q') をとるプレイヤーがプレイヤー集団内にいるとき，これらの戦略をもつプレイヤーが互いの戦略から得る期待利得 $F[(P, Q), (P', Q')]$ は

$$F[(P, Q), (P', Q')] = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(PQ') + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(P'Q)$$

で与えられるとする．これは各プレイヤーがコミュニケーションをする際に送り手，受け手の役割になる確率が等しいと仮定している．このようにすると集団内のすべてのプレイヤーにとって戦略集合が等しく，利得関数も対称的となる．このゲームを対称 SR ゲームと呼ぶ．

プレイヤー集団を想定する．戦略 $(P_l, Q_l) \in \mathcal{P}_{n\times m} \times \mathcal{Q}_{m\times n}$ をとるプレイヤーの割合を x_l で表す．するとこのプレイヤー集団の状態（state of the population）は次のベクトル x で与えられる．

$$x = (x_1, \dots, x_l, \dots, x_L) \in S_L = \{x \in \mathbf{R}^L_+ : \sum_{l=1}^{L} x_l = 1\}$$

各状態 $x \in S_L$ の平均戦略は，$(\bar{P}_x, \bar{Q}_x) = \sum_{l=1}^{L} x_l(P_l, Q_l)$ であり，行列の形で表記すると，

$$(\bar{P}_x, \bar{Q}_x) = \left[\begin{pmatrix} \bar{p}_{11} & \cdots & \bar{p}_{1j} & \dots & \bar{p}_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bar{p}_{i1} & \cdots & \bar{p}_{ij} & \dots & \bar{p}_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bar{p}_{n1} & \cdots & \bar{p}_{nj} & \dots & \bar{p}_{nm} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{q}_{11} & \cdots & \bar{q}_{1i} & \dots & \bar{q}_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bar{q}_{j1} & \cdots & \bar{q}_{ji} & \dots & \bar{q}_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bar{q}_{m1} & \cdots & \bar{q}_{mi} & \dots & \bar{q}_{mn} \end{pmatrix} \right].$$

ここで，$\bar{p}_{ij} = \sum_{l:p^l_{ij}=1} x_l$ かつ $\bar{q}_{ji} = \sum_{l:q^l_{ji}=1} x_l$ である．明らかに行列 $\bar{P}_x, \bar{Q}_x$ は，ともに確率行列となる．すなわち $\forall i, \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$ かつ $\forall j, \sum_{i=1}^{n} q_{ji} = 1$ が成り立つ．

このような確率行列の集合を $\mathcal{P}^{\triangle}_{n\times m} = \{P \in \mathbf{R}^{n\times m}_+ : \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1\}$，$\mathcal{Q}^{\triangle}_{m\times n} = \{Q \in \mathbf{R}^{m\times n}_+ : \sum_{j=1}^{n} q_{ji} = 1\}$ と表すとしよう．すると，$\Gamma_{n,m} = \{\mathcal{P}^{\triangle}_{n\times m} \times$

$\mathcal{Q}^{\triangle}_{m\times n}, F[(P,Q),(P',Q')]\}$ は，対称 SR ゲームの混合拡大されたゲームと解釈することもできる．

2.2　均衡

$B(P)$ と $B(Q)$ を，非対称 SR ゲームにおける戦略 P，Q それぞれに対する最適反応の集合とする．すなわち，$B(P) = \{Q \in \mathcal{Q}^{\triangle}_{m\times n} : \mathrm{tr}(PQ) \geq \mathrm{tr}(PQ')\ \forall Q' \in \mathcal{Q}^{\triangle}_{m\times n}\}$，$B(Q) = \{P \in \mathcal{P}^{\triangle}_{n\times m} : \mathrm{tr}(PQ) \geq \mathrm{tr}(P'Q)\ \forall P' \in \mathcal{P}^{\triangle}_{n\times m}\}$ である．戦略の組 $(P,Q) \in \mathcal{P}^{\triangle}_{n\times m} \times \mathcal{Q}^{\triangle}_{m\times n}$ が対称 SR ゲーム $\Gamma_{n,m}$ のナッシュ均衡戦略であることの必要十分条件が，P,Q が互いに非対称 SR ゲームの最適反応の組であること（すなわち，$P \in B(Q)$ かつ $Q \in B(P)$）であることは自明であろう．これと補題 1 を用いると，ナッシュ均衡戦略であるかどうかを容易に確認することができる．

補題 1. 最適反応の特徴（Pawlowitsch, 2008）
(i) $Q \in B(P)$ ならば，$\displaystyle\sum_{i\in \mathrm{argmax}_i(p_{ij^*})} q_{j^*i} = 1$ かつ $q_{j^*i} = 0\ \ \forall i \notin \mathrm{argmax}_i(p_{ij^*})$;
(ii) $P \in B(Q)$ ならば，$\displaystyle\sum_{j\in \mathrm{argmax}_i(q_{ji^*})} p_{i^*j} = 1$ かつ $p_{i^*j} = 0\ \ \forall j \notin \mathrm{argmax}_j(q_{ji^*})$.

· ナッシュ均衡戦略の例 (P,Q)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1-y & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ x,y \in [0,1].$$

この例から，一般にナッシュ均衡は無限個存在することが理解できよう．

· ナッシュ均衡戦略の例 (P,Q)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

この例から，ゼロ列をもつ戦略もナッシュ均衡になりえることがわかる．どんな事象でも使用されないメッセージや，どんなメッセージを受けても受け手が認識しない事象が存在するナッシュ均衡である．ナッシュ均衡戦略は無限あるので，次のような概念で均衡選択を試みるのは自然である．戦略 $(P,Q) \in \mathcal{P}^{\triangle}_{n\times m} \times \mathcal{Q}^{\triangle}_{m\times n}$ が次を満たすとき**進化的安定戦略**（ESS）と呼ばれる．(i) (P,Q) がナッシュ戦略であり，(ii) ある戦略 $(P',Q') \in \mathcal{P}^{\triangle}_{n\times m} \times \mathcal{Q}^{\triangle}_{m\times n} \backslash \{(P,Q)\}$ が存在して $F[(P',Q'),(P,Q)] =$

$F[(P,Q),(P,Q)]$ ならば，$F[(P,Q),(P',Q')] > F[(P',Q'),(P',Q')]$. 定理 1 は対称 SR ゲームにおける ESS の特徴づけとしての基本定理と言えよう.

定理 1. (Trapa and Nowak, 2000) (P,Q) がゲーム $\Gamma_{n,m}$ の ESS であることの必要十分条件は，P が置換行列であり，かつ Q が P の転置行列であることである.

· ESS の例 (P,Q)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定理 1 から，ゲーム $\Gamma_{n,m}$ に ESS が存在するためには，P,Q はともに同じサイズの正方行列であること，つまり $n=m$ が必要であることが直ちに判明する．$n \neq m$ の場合でも存在するのが次の中立安定戦略である.

定義 1. 戦略 $(P,Q) \in \mathcal{P}^{\triangle}_{n\times m} \times \mathcal{Q}^{\triangle}_{m\times n}$ が次を満たすとき**中立安定戦略**（NSS）と呼ばれる.

(i) (P,Q) がナッシュ戦略であり，

(ii) ある戦略 $(P',Q') \in \mathcal{P}^{\triangle}_{n\times m} \times \mathcal{Q}^{\triangle}_{m\times n} \backslash \{(P,Q)\}$ が存在して $F[(P',Q'),(P,Q)] = F[(P,Q),(P,Q)]$ ならば，$F[(P,Q),(P',Q')] \geq F[(P',Q'),(P',Q')]$.

定理 2 は対称 SR ゲームにおける NSS の特徴づけとしての基本定理と言えよう.

定理 2. (Pawlowitsch, 2008) $(P,Q) \in \mathcal{P}^{\triangle}_{n\times m} \times \mathcal{Q}^{\triangle}_{m\times n}$ をゲーム $\Gamma_{n,m}$ のナッシュ戦略とする．(P,Q) が NSS であることの必要十分条件は，

(i) 少なくとも P もしくは Q の一方が，0 のみからなる列（ゼロ列と呼ぶ）をもたず，

(ii) P と Q のすべての列が，0 より大きく 1 より小さい値をとる複数個の最大成分をもたないことである.

· NSS の例 (P,Q)

$$P = \begin{pmatrix} 1-x & x & 0 \\ 1-x-\varepsilon & x-\varepsilon & 2\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$，ただし $x \in (0,1), \varepsilon \in (0,x)$.

この例からもわかるように，ナッシュ均衡を絞り込みはするが NSS もまた無限個存在する．特に ESS が存在しない場合，つまり $n \neq m$ である場合に，NSS のうちでどのような戦略が選択され，どのような戦略が有利となって集団中に固定されやすいかに我々は興味がある．そこで次節以降では 2 事象・3 メッセージの SR ゲームに限定して分析を進める.

2.3　$(P,\ Q) \in \mathcal{P}^{\triangle}_{2\times 3} \times \mathcal{Q}^{\triangle}_{3\times 2}$ の NSS

$(P,\ Q) \in \mathcal{P}^{\triangle}_{2\times 3} \times \mathcal{Q}^{\triangle}_{3\times 2}$ を NSS とする．次節以降で我々が検討すべき NSS の行列表現における列の特徴をここで調べておく．次節以降の分析対象となる NSS の行列表現が絞り込まれることを明らかにする．

補題 2. Q は成分が 0 のみからなる列 (ゼロ列) をもつことはない．

証明　一般性を失わず，Q の 2 列目がゼロ列であると仮定する．すると，Q の第 1 列はすべての成分が 1 であり，P, Q は $x, y, x', y' \in [0,1]$ を用いて次のように表すことができる．

$$(P,Q)=\left\{\left(\begin{pmatrix} x & y & 1-x-y \\ x' & y' & 1-x'-y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \middle|\ x,y,x',y' \in [0,1] \right\}$$

(P,Q) は定理 2 より，NSS だから $x \neq x'$，$y \neq y'$ である．

ケース (1) $x > x'$, $y > y'$ とする．このとき，$1-x-y < 1-x'-y'$ であるから，補題 1 の最適反応の特徴を使い，$B\,(P)$ の要素は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形のみである．よって，$Q \notin B(P)$ となり，Q が NSS であることに反する．

ケース (2) $x > x'$, $y < y'$ とする．補題 1 の最適反応の特徴より，P に対する最適反応の集合 $B\,(P)$ の要素は，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$ の形のみであり，$Q \notin B(P)$ であるから，Q が NSS であることに反する．

ケース (3)　$x < x'$, $y < y'$ とする．P に対する最適反応の集合 $B\,(P)$ の要素は，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の形のみである．よって，$Q \notin B(P)$．以上より，Q がゼロ列をもつ NSS は存在しない．□

Q がゼロ列をもたないため，いずれの事象も受け手によって認識される．P が 2 つのゼロ列をもつとナッシュ戦略にすらならない．

補題 3. P はゼロ列を 2 つもつことはない．

証明　$(P,Q) \in \mathcal{P}^{\triangle}_{2\times 3} \times \mathcal{Q}^{\triangle}_{3\times 2}$ を NSS であるとする．P がゼロ列を 2 つもつとする．一般性を失わず，

$$(P,Q)=\left\{\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x&1-x\\y&1-y\\z&1-z\end{pmatrix}\right)\middle|\,x,y,z\in[0,1]\right\}$$

とおくことができる．そのとき，

ケース（1） $x,y,z\in(0,1)$ とする．(P,Q) は NSS であるから，定理 2 より，x,y,z はすべて互いに異なる値でなければならない．このとき，一般性を失わず，これら 3 つの唯一の最大値を x であると仮定する．Q の第 2 列では，$1-x$ は最大値とはなりえない．よって $B(Q)$ は $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&*&*\end{pmatrix}$ の形のみであり，$P\notin B(Q)$．

ケース（2） $x,y,z\in[0,1]$ とする．（2-1）$x=1$ とすると，

$$(P,Q)=\left\{\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\y&1-y\\z&1-z\end{pmatrix}\right)\middle|\,y,z\in[0,1]\right\}.$$

補題 2 より，$y=z=1$ はない．$y=1,z<1$ のとき，補題 1 の最適反応の特徴を使い，$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\z&1-z\end{pmatrix}$ の要素は $\begin{pmatrix}*&*&*\\0&1&0\end{pmatrix}$ の形のみであり，$P\notin B(Q)$．これは $y=1,z<1$ でも同様である．

$y<1,z<1$ のとき，$y>z$ ならば，補題 1 の最適反応の特徴より，$\begin{pmatrix}1&0\\y&1-y\\z&1-z\end{pmatrix}$ の要素は $\begin{pmatrix}*&*&*\\0&0&1\end{pmatrix}$ の形のみであり，$P\notin B(Q)$．($y<z$ も同様)．

（2-2）Q に関して $y=1$ とするとき，

$$(P,Q)=\left\{\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x&1-x\\1&0\\z&1-z\end{pmatrix}\right)\middle|\,x,z\in[0,1]\right\}.$$

(2-1) と同様に場合分けを行う．$x<1$，$z=1$ のとき，補題 1 の最適反応の特徴より，$\begin{pmatrix}x&1-x\\1&0\\1&0\end{pmatrix}$ の要素は $\begin{pmatrix}0&*&*\\*&*&*\end{pmatrix}$ の形のみである．したがって，$P\notin B(Q)$．

$x < 1$，$z < 1$ のとき，補題 1 の最適反応の特徴を使い，$\begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1 & 0 \\ z & 1-z \end{pmatrix}$ の要素は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$ の形のみである．したがって，$P \notin B(Q)$.

(2-3)　$x = 0$ のとき，補題 2 から $y = z = 0$ はない．$y > 0$，$z = 0$ のとき，補題 1 の最適反応の特徴より，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y & 1-y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の要素は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$ の形のみであり，$P \notin B(Q)$.

$y = 0$，$z < 1$ のとき，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ z & 1-z \end{pmatrix}$ の要素は補題 1 の最適反応の特徴より，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ * & * & * \end{pmatrix}$ の形のみである．よって $P \notin B(Q)$.

$y > z$ のとき $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y & 1-y \\ z & 1-z \end{pmatrix}$ の要素は，補題 1 の最適反応の特徴より $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$ の形のみである．よって $P \notin B(Q)$．$z > y$ のときも同様にして $P \notin B(Q)$.

$y = 0$，$z > 0$ のとき，補題 1 の最適反応の特徴を使い，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ z & 1-z \end{pmatrix}$ の要素は $\begin{pmatrix} * & * & 1 \\ * & * & * \end{pmatrix}$ の形のみである．よって $P \notin B(Q)$.

(2-4)　$y = 0$ とする．$x > 0$，$z = 0$ のとき，補題 1 の最適反応の特徴より，$\begin{pmatrix} x & 1-x \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の要素は $\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$ の形のみであり，$P \notin B(Q)$.

$x > 0$，$z > 0$ のとき，補題 1 の最適反応の特徴より，$\begin{pmatrix} x & 1-x \\ 0 & 1 \\ z & 1-z \end{pmatrix}$ の要素は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & * \end{pmatrix}$ の形のみである．よって，$P \notin B(Q)$.

(2-5) $z = 0$ とするとき，補題 2 より，$y = x = 0$ はない．$x > y$ のとき，補題 1 の最

適反応の特徴より，$\begin{pmatrix} x & 1-x \\ y & 1-y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の要素は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$．の形のみである．よって，$P \notin B(Q)$．$y > x$ のときも同様にして $P \notin B(Q)$．以上から，どのケースにおいても $P \in B(Q)$ は $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の形をしておらず，P がゼロ列を 2 つもつことはない．□

3 淘汰・突然変異動学による均衡選択

プレイヤー集団の適応過程としてレプリケーター動学を想定すると，SR ゲームでは**漸近安定性**のような強い安定性をもつ戦略 (P, Q) が少ないことが知られている．事象とメッセージの数が等しい場合には，漸近安定性をもつ戦略は，ESS のみであることが知られている (Huttegger, 2007; Pawlowitsch, 2008)．

適応過程として**淘汰・突然変異動学**を想定すると，2 事象・2 メッセージの場合に，確率的変動の値を適切に選ぶことで漸近安定性をもつ NSS が存在することが証明されている (Hofbauer and Huttegger, 2008)．3 事象・3 メッセージの場合には，漸近安定性をもつ戦略が ESS のみであることが示されている (Hofbauer and Huttegger, 2015)．彼らは，4 事象・4 メッセージの場合でも同様の結果が導かれると予想している．

本節では，淘汰・突然変異動学の下で，2 事象・3 メッセージのケースを分析し，漸近安定性という強い安定性をもつ NSS が存在することを証明する．

3.1 モデル

本節では, Hofbauer and Huttegger（2015) と同様に，送り手はメッセージを送るのみであり，受け手はメッセージを受け取って複数の事象のいずれかと対応させるだけという状況を考える．2 事象・3 メッセージのケースでは，送り手の戦略 $P \in \mathcal{P}^{\triangle}_{2\times 3}$ と受け手の戦略 $Q \in \mathcal{Q}^{\triangle}_{3\times 2}$ は，次のようになる．

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \\ q_{31} & q_{32} \end{pmatrix}.$$

このとき，事象 $i \in \{1,2\}$ における送り手の局所戦略は，

$$S_i^P = \{(p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}) \in \mathbf{R}^3 | \sum_j^3 p_{ij} = 1, p_{ij} \geq 0\}.$$

事象が 2 つであるから，送り手の行動戦略の集合は, $S_1^P \times S_2^P$ となる．一方，メッセージ $j \in \{1,2,3\}$ に対する受け手の局所戦略は，

$$S_j^Q = \{(q_{j1}, q_{j2}) \in \mathbf{R}^2 | \sum_i^2 q_{ji} = 1, q_{ji} \geq 0\}.$$

メッセージが 3 つであるから，受け手の行動戦略の集合は，$S_1^Q \times S_2^Q \times S_3^Q$ となる．本節では，非対称 SR ゲームの設定で均衡の選択を行う．*6

以上のとき，淘汰・突然変異方程式 $\dot{p}_{11}$, $\dot{q}_{11}$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}\dot{p}_{11} &= p_{11}(q_{11} - p_{11}q_{11} - p_{12}q_{21} - p_{13}q_{31}) \\ &\quad + \varepsilon_{11}p_{11} + \varepsilon_{12}p_{12} + \varepsilon_{13}p_{13} - \varepsilon_{11}p_{11} - \varepsilon_{21}p_{11} - \varepsilon_{31}p_{11},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_{11} &= q_{11}(p_{11} - q_{11}p_{11} - q_{12}p_{21}) \\ &\quad + \delta_{11}q_{11} + \delta_{12}q_{12} - \delta_{11}q_{11} - \delta_{21}q_{11}.\end{aligned}$$

ここで，すべての $k, l \in \{1,2,3\}, s, t \in \{1,2\}$ について, $\varepsilon_{kl}, \delta_{st}$ は十分に小さいものとする．

淘汰・突然変異方程式は，すべての $k, l \in \{1,2,3\}, s, t \in \{1,2\}$ について $\varepsilon_{kl} = 0, \delta_{st} = 0$ のとき，レプリケーター方程式 (淘汰方程式) と一致する．

$\dot{q}_{11}$ では，$q_{11}(p_{11} - q_{11}p_{11} - q_{12}p_{21})$ がレプリケーター方程式を表す．レプリケーター方程式の値は，選択した戦略が戦略の平均より大きい利得のときに増加し，小さいときに減少する．戦略の平均と一致しているときには定常点 (0) となる．

他方，淘汰・突然変異方程式からレプリケーター方程式を除いた部分は，突然変異方程式と呼ばれる．$\dot{q}_{11}$ では，$\delta_{11}q_{11} + \delta_{12}q_{12} - \delta_{11}q_{11} - \delta_{21}q_{11}$ が突然変異方程式を表す．

突然変異方程式の前半部は，戦略 q_{11} 以外の戦略から微小の確率で q_{11} の戦略へ移行することを表している．例えば，q_{12} の戦略は確率 δ_{12} の確率で戦略 q_{11} に移行する．ここでは，q_{11} の戦略も δ_{11} の確率で q_{11} の戦略に移行するものとする．

*6 非対称 SR ゲームを設定しているので，プレイヤー集団を送り手と受け手に分割した 2 集団から成る動学を分析していることになる．対称 SR ゲームの動学に比べて状態空間の次元が小さくなり，分析が比較的容易になる．

突然変異方程式の後半部は，q_{11} の戦略が，微小の確率で他の戦略に移行することを表している．ここでは，q_{11} の戦略も，δ_{11} の確率で q_{11} の戦略に移行するものとする．

簡略化のため，すべての $k,l \in \{1,2,3\}, s,t \in \{1,2\}$ について，$\varepsilon_{kl} = \varepsilon, \delta_{st} = \delta$ とすると，p_{11}, q_{11} についての淘汰・突然変異方程式は，

$$\dot{p}_{11} = p_{11}(q_{11} - \sum_{j}^{3} p_{1j}q_{j1}) + \varepsilon(1 - 3p_{11}),$$

$$\dot{q}_{11} = q_{11}(p_{11} - \sum_{i}^{2} q_{1i}p_{i1}) + \delta(1 - 2q_{11}).$$

となる．次では，この淘汰・突然変異方程式を用いて，摂動定常点 (perturbed rest point) を分析し，SR ゲームにおける NSS の安定性について調べる． ε と δ の値を適切に選べば，$n \neq m$ の SR ゲームにおいて漸近安定性をもつ NSS が存在することを示す．

3.2 漸近安定性をもつ NSS

定理 3. 淘汰・突然変異動学の下では，$n \neq m$ の SR ゲームにおいて，漸近安定な NSS が存在する．

証明　$n = 2, m = 3$ のケースで証明する．証明のステップは以下のとおりである．

ステップ 1: 淘汰・突然変異動学の下で，漸近安定性を調べるために，NSS を満たす戦略 $(P,Q) \in \mathcal{P}^{\triangle}_{2\times3} \times \mathcal{Q}^{\triangle}_{3\times2}$ に注目して，摂動定常点 $(\tilde{P}, \tilde{Q})$ を求める．

ステップ 2: 淘汰・突然変異方程式と定常点 $(\tilde{P}, \tilde{Q})$ から，12 行 12 列のヤコビ行列を導出し，ヤコビ行列を余因子展開し，固有方程式 $\chi(\lambda)$ を求める．ここですべての λ が負の値であれば，摂動定常点 $(\tilde{P}, \tilde{Q})$ は漸近安定性をもつ．

ステップ 1 摂動定常点を求める．

NSS を満たす下記のような戦略 (P,Q) に注目し，淘汰・突然変異動学における摂動定常点を求める．

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ q_{31} & q_{32} \end{pmatrix}.$$

ここで，$q_{31} + q_{32} = 1, 0 \leq q_{31}, q_{32} \leq 1$.

淘汰・突然変異動学の下では, 定常点は摂動しているため，淘汰・突然変異方程式に戦略 (P,Q) の要素の値を代入しても，0 にならないことが確認できる．摂動定常

点を求めるために，戦略 (P, Q) を以下のように書き直す．

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1-p_1-p_2 & p_1 & p_2 \\ p_1 & 1-p_1-p_2 & p_2 \end{pmatrix}, \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1-q & q \\ q & 1-q \\ q_{31} & q_{32} \end{pmatrix}.$$

まず，定常点における q_{31}, q_{32} の値を求める．

$$\dot{q}_{31} = q_{31}(p_{13} - p_{13}q_{31} - p_{23}q_{32}) + \delta(1-2q_{31}) = 0,$$
$$\dot{q}_{32} = q_{32}(p_{23} - p_{13}q_{31} - p_{23}q_{32}) + \delta(1-2q_{32}) = 0.$$

$(\tilde{P}, \tilde{Q})$ の要素の値を代入すると，

$$q_{31}(p_2 - p_2q_{31} - p_2q_{32}) + \delta(1-2q_{31}) = 0,$$
$$q_{32}(p_2 - p_2q_{31} - p_2q_{32}) + \delta(1-2q_{32}) = 0.$$

両式とも p_2 でまとめると，$q_{31}p_2(1-q_{31}-q_{32}) = 0$, $q_{32}p_2(1-q_{31}-q_{32}) = 0$ となるから，以下の式を得る．

$$\delta(1-2q_{31}) = 0,$$
$$\delta(1-2q_{32}) = 0.$$

したがって，戦略 $(\tilde{P}, \tilde{Q})$ は次のように書き直すことができる．

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1-p_1-p_2 & p_1 & p_2 \\ p_1 & 1-p_1-p_2 & p_2 \end{pmatrix}, \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1-q & q \\ q & 1-q \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

p_1, p_2, q を求めるために，$\dot{p}_{12}, \dot{p}_{13}, \dot{q}_{12}$ を p_1, p_2, q についてテーラー展開し，$p_1 = 0, p_2 = 0, q = 0$ で評価することで $p_1 = \varepsilon, p_2 = 2\varepsilon, q = \delta$ を求めることができる．よって，下記のような摂動定常点を得る．

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1-3\varepsilon & \varepsilon & 2\varepsilon \\ \varepsilon & 1-3\varepsilon & 2\varepsilon \end{pmatrix}, \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1-\delta & \delta \\ \delta & 1-\delta \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

これらの値を淘汰・突然変異方程式に代入すると，0 となることを確かめることができる．

ステップ 2: ヤコビ行列を求め, 固有方程式を導出する

摂動定常点 $(\tilde{P}, \tilde{Q})$ の値を用い，淘汰・突然変異方程式から，12 行 12 列のヤコビ行列を導出する．ヤコビ行列を余因子展開することで, 以下の固有方程式を得る．

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) =& (\lambda - 2\varepsilon - \delta + 1)(\lambda + \varepsilon - 2\delta + 1)^2(\lambda + 2\varepsilon - \delta + \frac{1}{2})(\lambda - 3\varepsilon + 1)^2(\lambda - 4\varepsilon + \delta + 1)^2 \\ &\times (\lambda + \varepsilon + 2\delta)(\lambda - \varepsilon + 2\delta)(\lambda - \delta + \frac{1}{2})(\lambda + 2\varepsilon - \delta + 1) = 0.\end{aligned}$$

この式から，$2\delta > \varepsilon$ で ε, δ が十分小さいとき，すべての λ が負の値をとることが確認できる．したがって, 戦略 (P, Q) の近くで摂動定常点は漸近安定となる． □

ＳＲゲームは，$n = m$ のとき，レプリケーター動学の下で漸近安定性をもつのはESS のみであり，$n \neq m$ のとき，SR ゲームにおいては，ESS が存在しない．このような中で，淘汰・突然変異動学の下ではあるが，漸近安定性をもつ NSS の存在を明らかにしたことは一定の意義があると言える．$n = 3, m = 4$ の場合でも, 次の摂動定常点

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} 1-\frac{7}{2}\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \frac{3}{2}\varepsilon \\ \varepsilon & 1-\frac{7}{2}\varepsilon & \varepsilon & \frac{3}{2}\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1-\frac{7}{2}\varepsilon & \frac{3}{2}\varepsilon \end{pmatrix}, \bar{Q} = \begin{pmatrix} 1-2\delta & \delta & \delta \\ \delta & 1-2\delta & \delta \\ \delta & \delta & 1-2\delta \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

を用い, 淘汰・突然変異方程式から, 24 行 24 列のヤコビ行列を導出すると, 以下の固有方程式を得る.

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) =& (\lambda - \frac{5}{2}\varepsilon - 2\delta + 1)^2(\lambda + \varepsilon - 3\delta + 1)^6(\lambda + \frac{3}{2}\varepsilon - 2\delta + \frac{2}{3})^2(\lambda - \frac{7}{2}\varepsilon - \delta + 1)^3 \\ &\times(\lambda - \frac{9}{2}\varepsilon + \delta + 1)^6(\lambda + \frac{1}{2}\varepsilon + 3\delta)^2(\lambda - \varepsilon + 3\delta)(\lambda - \frac{3}{2}\varepsilon - 2\delta + \frac{2}{3})(\lambda + 2\varepsilon - 2\delta + 1) = 0. \end{aligned}$$

以上から $3\delta > \varepsilon$ で, ε, δ が十分に小さいとき, すべての λ が負の値となり, 漸近安定性をもつことが確認できる．今後は n と m の非対称性が拡大した場合など, $n \neq m$ において漸近安定性を維持する NSS が常に存在するのか，どういった条件の下で存在するのかを確かめることが課題となろう．

4　頻度依存の出生死亡過程による均衡選択

各プレイヤーがとる戦略を，$L_A \in \mathcal{P}^{\triangle}_{2\times3} \times \mathcal{Q}^{\triangle}_{3\times2}$ もしくは，$L_B \in \mathcal{P}^{\triangle}_{2\times3} \times \mathcal{Q}^{\triangle}_{3\times2}$ のいずれかとする．そのプレイヤーからなる集団を N 人有限集団とする．*7そこで次のような離散時間 $t = 0, 1, \ldots$ の確率過程を淘汰プロセスとして想定する．確率過程の各期の状態は，戦略 L_A をとっているプレイヤーの人口で表され，状態空間は $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ となる．初期時点（$t = 0$）において，全員が戦略 L_B をとっている集団に，別の戦略 L_A のプレイヤーが突然変異で 1 人出現すると仮定する．まず，ランダムマッチングにより，その期の各戦略の期待利得（適応度）が定まる．続けてプレイヤーが 1 人，集団から抽出され，次期（$t = 1$）にそのプレイヤーと同じ戦略のプレイヤーが 1 人，集団に追加される．この抽出されたプレイヤーを出生プレイヤー

*7 これに対し，レプリケーター動学では，集団のプレイヤー数は無限でもよい．

と呼ぶ．この抽出と同じ期間内（$t=0$）に，プレイヤーが 1 人，集団から抽出されて，次期（$t=1$）にそのプレイヤーは死亡する．このプレイヤーを死亡プレイヤーと呼ぶ．出生プレイヤーと死亡プレイヤーは重複してもよい．どの期もプレイヤー集団の人口は N で一定となることに注意されたい．

各戦略のプレイヤーが出生プレイヤーとして抽出される確率が，その期の各戦略の期待利得に依存するモデルを**頻度依存の出生死亡過程**（Nowak et al., 2004）と呼ぶ．これら抽出確率が，その期の期待利得に依存せず，まったくランダムに抽出される出生死亡過程を**中立的浮動**と呼ぶ．

全員が L_B をとっている集団に，初期時点で戦略 L_A が突然変異で侵入し，上の頻度依存の出生死亡過程を経て全員が L_A となる確率を，この過程の下での戦略 L_A の**固定確率**（fixation probability）と呼び ρ_{L_A} と書く．中立的浮動の場合は，どのプレイヤーの戦略もその固定確率は $\frac{1}{N}$ であることが知られている．上で述べた**頻度依存の出生死亡過程**における抽出確率について，ゲームの期待利得に依存する程度が，非常に小さい場合の ρ_{L_A} に我々は関心を絞る．その場合の固定確率について $\rho_{L_A} > \frac{1}{N}$ であるとき，戦略 L_A はこの淘汰プロセスにおいて**有利**であると言う．同様に，全員が L_A をとっている集団に，初期時点で戦略 L_B が突然変異で侵入し，上の頻度依存適応度の出生死亡過程を経て全員が L_B となる確率を，この過程の下での戦略 L_B の固定確率と呼び ρ_{L_B} と書く．固定確率について $\rho_{L_B} > \frac{1}{N}$ であるとき，戦略 L_B はこの淘汰プロセスにおいて**有利**であると言う．この頻度依存の出生死亡過程を表現する推移行列の定義および，各戦略が有利になることと必要十分な条件式とその導出方法については，本論文の付録を参照されたい．

4.1　P がゼロ列をもつ NSS どうしのマッチング

$\mathcal{P}^{\triangle}_{2\times 3} \times \mathcal{Q}^{\triangle}_{3\times 2}$ の NSS に注目する限りにおいて，補題 2 と補題 3 より，P が 1 つのゼロ列をもつケースのみを調べればよい．その各ケースを L_1，L_2，L_3，L_4 とおく:

$$L_1 = (P_1, Q_1) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 1-x \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \middle| \, x \in [0,1] \right\}$$

$$L_2 = (P_2, Q_2) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' & 1-x' \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \middle| \, x' \in [0,1], x' \neq x \right\}$$

	L_1	L_3
L_1	2	$1-y$
L_3	x	2

表 1　$L_1 vs L_3$

	L_1	L_4
L_1	2	$1+z$
L_4	$1+x$	2

表 2　$L_1 vs L_4$

$$L_3=(P_3,Q_3)=\left\{\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\y&1-y\\0&1\end{pmatrix}\middle|\ y\in[0,1]\ \right\}$$

$$L_4=(P_4,Q_4)=\left\{\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\z&1-z\end{pmatrix}\middle|\ z\in[0,1]\ \right\}$$

(1) $L_1 vs L_2$　$\pi(P_1,Q_1)=\pi(P_2,Q_2)=2, \pi(P_1,Q_2)=\pi(P_2,Q_1)=2$．付録の式 (1) より，淘汰が L_1 にとって有利に働く条件は $a+2b>c+2d \Longleftrightarrow 6>6$ （$\perp$:矛盾．以後，この記号を用いる)．付録の式 (2) より，淘汰が L_2 にとって有利に働く条件は，$2c+d>2a+b \Longleftrightarrow 6>6$ ($\perp$)．したがって，L_1 と L_2 はいずれも淘汰において有利ではない．

(2) $L_1 vs L_3$　$\pi(P_1,Q_3)=1-y$，$\pi(P_2,Q_1)=x$．このゲームの利得を表 1 に示す．淘汰が L_1 にとって有利に働く条件は，付録の式 (1) より，$a+2b>c+2d \Longleftrightarrow 2+2(1-y)>x+2\cdot 2 \Longleftrightarrow y<-\frac{1}{2}x$．$x,y\in[0,1]$ ($\perp$)．一方，淘汰が L_3 にとって有利に働くのは，付録の式 (2) より，$2c+d>2a+b \Longleftrightarrow y>3-2x$．$x,y\in[0$，$1]$ ($\perp$)．したがって，L_1 と L_3 はいずれも淘汰において有利とは言えない．

(3) $L_1 vs L_4$　このゲームの利得は表 2 となる．表 2 と付録の式 (1) より，淘汰が L_1 に有利に働く条件は，$2+2(1+z)>1+x+2\cdot 2 \Longleftrightarrow z>\frac{1}{2}(1+x)$．$L_1$ が L_4 に対し，淘汰において有利になる理由は，P_1 と Q_4 がマッチングしたとき，P_1 の 3 列が z を有効に利用するためである．表 2 と付録の式 (2) より，淘汰が L_4 にとって有利に働くのは，$z<2x-1$．L_4 が L_1 に固定される理由は，P_4 と Q_1 がマッチングしたとき，P_4 の 1 列が x を有効に利用するためである．図 2 の影の領域は，各戦略

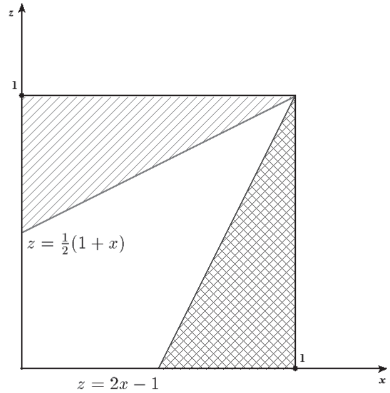

図 2　左上の影の領域で L_1 が有利．右下の影の領域で L_4 が有利．

	L_3	L_4
L_3	2	$2-z$
L_4	$2-y$	2

表 3　$L_3 vs L_4$

が有利となるところを表す．$2x-1 < z < \frac{1}{2}(1+x)$ の範囲では，L_1 と L_4 はいずれも有利とは言えない．

(4) $L_3 vs L_4$　このゲームの利得表を表 3 に示す．表 4 と付録の式 (1) より，淘汰が L_3 に有利に働く条件は，$y > 2z$ である．また付録の式 (2) より，淘汰が L_4 にとって有利に働く条件は，$y < \frac{1}{2}z$ である．$\frac{1}{2}z < y < 2z$ の範囲では，L_3 と L_4 は淘汰において有利であるとも不利であるとも言えない．

4.2　P がゼロ列をもたない NSS ともつ NSS のマッチング

P がゼロ列をもたない NSS は数多く存在する．例として，ゼロ列をもたない戦略を L_5 とする:

$$L_5=(P_5,Q_5)=\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & 1-w \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, w \in (0,1) \right\}$$

L_3vsL_5　L_3 と L_5 のマッチングによる利得を表 4 に示す．淘汰が L_3 にとって有利

	L_3	L_5
L_3	2	2
L_5	$2-wy$	2

表 4　$L_3 vs L_5$

に働く条件は付録の式 (1) から，$wy > 0$．$w \in (0,1)$，$y \in [0,1]$ より，$y \neq 0$ の限りにおいて，L_3 は L_5 より有利となる．一方，淘汰が L_5 にとって有利に働く条件は付録の式 (2) から，$wy < 0$．$w \in (0,1)$，$y \in [0,1]$ （⊥）．よって L_5 が L_3 に対して，淘汰で有利とは言えない．

以上の例示により，本節では次の 2 つの結果を得る．ゼロ列をもたない NSS どうしがマッチングする場合，いずれの戦略も有利にも不利にもならない場合がある．またゼロ列をもたない NSS とゼロ列をもつ NSS がマッチングする場合，もたない NSS のみが淘汰において有利になる場合がある．つまり，淘汰について出生死亡過程を想定すると，あいまいな記号をもたない戦略は，もつ戦略よりも有利になることがある．

5　ディスカッション

事象数とメッセージ数が等しいという限定的な状況を除けば，SR ゲームに ESS はない．Pawlowitsch（2008）は，NSS の完全な特徴づけに成功している．しかし，それと同時に NSS には様々なパターンがあることを明らかにしたとも言える．それには，送り手が確率的にメッセージを混ぜたり，受け手が確率的にメッセージを事象と結びつける NSS がある．送り手が利用可能なメッセージをあえて使用しなかったり，どんなメッセージを受け取っても受け手がある事象を認識しなかったりする NSS もある．そこで本論文では NSS をリアプノフ安定であるとまでしか言えないレプリケーター動学に見切りをつけ，自然淘汰モデルの他の選択動学によって，NSS のうちでどのような戦略が選択されてくるのかを検討した．

淘汰・突然変異動学では，突然変異がどの期にも発生すると想定する．この突然変異があることによって，NSS の中に適応動学の漸近安定点が見出される．直感的には，突然変異の確率に依存して，各戦略からの流出と各戦略への流入がちょうどバランスをとる NSS が選ばれてくると考えられる．一般のコミュニケーション・システムにおいて，そこに ESS がない場合には，小さな確率で発生し続ける突然変異の存在こそが，確率的なコミュニケーションの安定性をゆるぎないものにしている可能性を，本論文は示唆している．

また出生死亡過程の淘汰プロセスでは，2 事象・3 メッセージの場合，利用可能なメッセージの一部を使用しない NSS（P がゼロ列を持つ NSS）が，すべてのメッセージを確率的に混ぜる NSS よりも，有利になる場合があることも判明した．これは，多くの利用可能なメッセージやそれを発する機能が個体に備わっていても，伝えるべき事象数が少なく限られていれば，使われるメッセージの種類が社会で減少していくことを示唆する．我々が検討した 2 事象・3 メッセージというモデルで言うならば，長期的には，2 事象・2 メッセージのコミュニケーション・システムの社会に移行し，最終的には首尾よく ESS で落ち着くというストーリーが浮かぶ．

これと対照的な例が次である．ゼロ列をもつ NSS とゼロ列をもたない NSS のマッチング例として，次の L_6 対 L_7 を考える．

$$L_6 = (P_6, Q_6) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 \\ b & 1-b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | a, b \in (0,1) \right\},$$

$$L_7 = (P_7, Q_7) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1-\beta \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in (0,1) \right\}.$$

第 4 節の頻度依存の出生死亡過程で，L_6 は淘汰において有利とは言えず，L_7 は淘汰において有利であることが確認できる．ここでは事象とメッセージの数が一致している．そして 2 事象・3 メッセージの場合とは逆に，ゼロ列を持つ戦略が選択されにくいのである．事象数とメッセージ数が異なるとき，使われないメッセージや事象があるほうが有利であり，これらの数が等しいときは，すべてのメッセージが使われ，すべての事象が認識される ESS に似たほうが有利なのである．したがって長期的には，ゲームの構造自体が変化し事象数とメッセージ数が等しくなっていくコミュニケーション・システムの変化が想起されよう．これは厳密なモデル分析ではなく，まだ 1 つの単なるストーリーに過ぎない．しかし，SR ゲームの構造自体が時間を通じて内生化されていくモデル構築の必要性を我々は本論文の検討結果から強く感じている．そのためにモデルに組み込むべきものは，豊富過ぎるメッセージの維持コストや，複雑な事象に対する認識コストのようなものかもしれない．

付 録

頻度依存の出生死亡過程を表す推移確率行列の導出

戦略 L_A と戦略 L_B がマッチングしたときの利得を次の表で表す．

	L_A	L_B
L_A	a	b
L_B	c	d

N 人からなるプレイヤー集団で戦略 L_A をとっている人数を i 人とする．確率過程の状態空間はこの人数 i である．状態 i における戦略 L_A の期待利得，戦略 L_B の期待利得は，それぞれ $F_i = \frac{(i-1)a+(N-i)b}{N-1}, G_i = \frac{ic+(N-i-1)d}{N-1}$ である．

$\omega \in [0,1]$ を，この期待利得が淘汰の適応度に与える影響度を表すパラメーターとする．状態 i における各戦略 L_A, L_B の適応度は，それぞれ $f_i = 1-\omega+\omega F_i, g_i = 1-\omega+\omega G_i$ となる．

出生死亡過程の各期において，各プレイヤーが出生プレイヤー，死亡プレイヤーとして抽出される確率が，これらの適応度に依存すると考える．状態 i から状態 $i+1$ に移る推移確率は $p_{i,i+1} = \frac{if}{if_i+(N-i)g_i} \times \frac{N-i}{N}$ となる．状態 i から状態 $i-1$ に移る推移確率は $p_{i,i-1} = \frac{(N-i)g_i}{if_i+(N-i)g_i} \times \frac{i}{N}$ となる．同じ状態 i に留まる確率は $p_{ii} = 1-p_{i,i+1}-p_{i,i-1}$ である．他の推移確率はすべて 0 である．以上により，頻度依存の出生死亡過程を表す $(N+1)\times(N+1)$ **推移確率行列**を得る．

淘汰で有利となる条件の導出

この確率過程の吸収状態は状態 0 と状態 N である．状態 1 からスタートし，吸収状態 N に至る確率を ρ_A と書き，これを戦略 L_B 集団における戦略 L_A の**固定確率**と呼ぶ．$\rho_A = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{N-1}\Pi_{i=1}^{j}\frac{1-\omega+\omega G_i}{1-\omega+\omega F_i}}$ であり，また**中立的浮動**においては，いずれの戦略もその固定確率は $\frac{1}{N}$ である．固定確率の導出方法は Nowak（2008）を参照されたい．

ω が非常に小さい弱い淘汰圧にもかかわらず，その場合の固定確率 ρ_A が，中立的浮動の固定確率 $\frac{1}{N}$ より大きくなる条件を考える．そこでまず，ρ_A の $\omega \to 0$ のときのテーラー (1 次) 近似を求める．ρ_A の分母を $f(\omega) = 1+\sum_{j=1}^{N-1}\Pi_{i=1}^{j}\frac{1-\omega+\omega G_i}{1-\omega+\omega F_i}$ とおけば，$\rho_A \approx \frac{1}{f(0)+\omega f'(0)}$ で得られる．

$f(0) = 1+\underbrace{1+1\cdot 1+\ldots+1\cdot 1\cdots 1}_{N-1\ 個} = N$ である．また

$$f'(\omega) = \frac{G_1-F_1}{(1-\omega+\omega F_1)^2} + \frac{G_1-F_1}{(1-\omega+\omega F_1)^2}\frac{1-\omega+\omega G_2}{(1-\omega+\omega F_2)} + \frac{G_2-F_2}{(1-\omega+\omega F_2)^2}\frac{1-\omega+\omega G_1}{(1-\omega+\omega F_1)} + \cdots + \frac{G_{N-1}-F_{N-1}}{(1-\omega+\omega F_{N-1})^2}\cdots\frac{1-\omega+\omega G_1}{(1-\omega+\omega F_1)}$$

であるから，$\omega f'(0) = -\omega\{(N-1)(F_1-G_1)+(N-2)(F_2-G_2)+\ldots+(F_{N-1}-G_{N-1})\}$

$= \omega \sum_{k=1}^{N-1} (N-k)(F_k - G_k)$ を得る．ここで，$(F_k - G_k) = \frac{(a-b-c+d)k+(b-d)N-a+d}{N-1}$ を代入して整理すると，$\omega f'(0) = -\frac{\omega}{N-1}\{\sum_{k=1}^{N-1}[(a-b-c+d)Nk + (bN - dN - a + d)N - (a-b-c+d)k^2 - (bN - dN - a + d)k]\} = -\dfrac{\omega}{6}\{3N(a-b-c+d) + 3(bN - dN - a + d) - (2N-1)(a-b-c+d) - 3(bN - dN - a + d)\} = -\dfrac{\omega N}{6}\{(a+2b-c-2d)N - (2a+b+c-4d)\}$.

以上から，$\alpha = (a+2b-c-2d), \beta = (2a+b+c-4d)$ として，ρ_A のテーラー近似式

$$\rho_A \approx \frac{1}{N}\frac{1}{1-\frac{\omega}{6}(\alpha N - \beta)}$$

を得る．

したがって，$\rho_A > \frac{1}{N} \Longleftrightarrow \alpha N - \beta > 0 \Longleftrightarrow (N-2)a + (2N-1)b > (N+1)c + (2N-4)d$. N が十分大きいとき，この条件は

$$a + 2b > c + 2d \qquad (1)$$

となる．同様の計算により，L_B が淘汰において有利になる条件は，N が十分に大きいとき，

$$2c + d > 2a + b \qquad (2)$$

となる．

参考文献

[1] Hofbauer, J. "The selection mutation equation." *Journal of Mathematical Biology*, 23(1):41-53, 1985.

[2] Hofbauer, J and Huttegger, S. "Feasibility of communication in binary signaling games." *Journal of Theoretical Biology*, 254(4):843-849, 2008.

[3] Hofbauer, J and Huttegger, S. "Selection-mutation dynamics of signaling games." *Games*, 6(1):2-31, 2015.

[4] Huttegger, S. "Evolution and the explanation of meaning." *Philosophy of Science*, 74(1):1-27, 2007.

[5] Lewis, D. *Convention: Philosophical Study.* Harvard University Press, Cambridge, MA, 1969.

[6] Nowak, M.A, Sasaaki, A,Taylor, C and Fudenberg, D. "Emergence of cooperation and evolutionary stability in finite populations." *Nature*,428:246-650, 2004.

[7] Nowak, M.A. *Evolutionary Dynamics : the Equations of Life*. Belknap Press of Harvard University Press, 2006. 竹内 康博・佐藤 一憲・巌佐 庸・中岡 慎治『進化のダイナミクス—生命の謎を解き明かす方程式』 共立出版, 2008 年.

[8] Pawlowitsch, C. "Finite populations choose an optimal language." *Journal of Theoretical Biology*,249(3):606-616, 2007.

[9] Pawlowitsch, C. "Why evolution does not always lead to an optimal signaling system." *Games and Economic Behavior*,63(1):203-226, 2008.

[10] Trapa, P and Nowak, M.A. "Nash equilibria for an evolutionary language game." *Journal of Mathematical Biology*,41(2):172-188, 2000.